

## 2.5 Mechanical Drive Systems

機械駆動系 ... 動力伝達

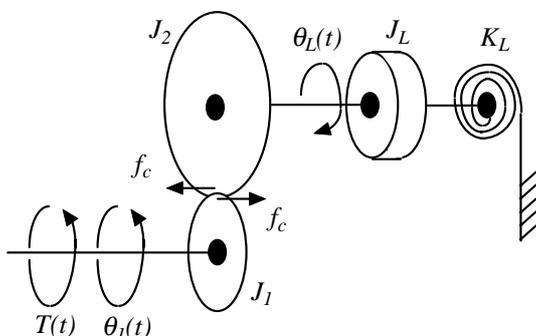


Fig.2.9 Schematic of gear train.

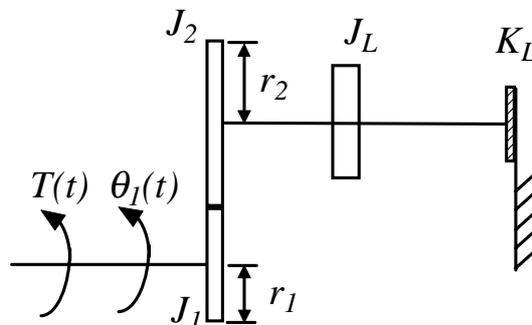


Fig.2.10 Plane view of gear train.

図 2.9 に示す駆動系において，入力トルク（原動機から伝達される動力トルク） $T(t)$ ，反力（接触） $f_c(t)$ ，角加速度  $\ddot{\theta}(t)$ ，慣性質量  $J_1$  とすると，駆動側の運動方程式は次のようになる．

$$T(t) - r_1 f_c(t) = J_1 \ddot{\theta}_1(t) \quad (2.45)$$

被駆動側に関しても同様に，次式を得る．

$$r_2 f_c(t) - K_L \theta_L(t) = \underbrace{(J_2 + J_L)}_{\text{(全体の慣性モーメント)}} \ddot{\theta}_L(t) \quad (2.46)$$

ギヤ比は

$$n = \frac{r_2}{r_1} \quad (2.47)$$

となるので，入力である駆動側の回転と被駆動側の回転には，次の関係が成立している．

$$n \theta_L(t) = \theta_1(t) \quad (2.48)$$

すなわち，次式を得る．

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_L}{\omega_1} = n \quad (4.49)$$

(2.45) と (2.46) から，内力  $f_c(t)$  を消去すると

$$nT(t) = [n^2 J_1 + (J_2 + J_L)] \ddot{\theta}_L(t) + K_L \theta_L(t) \quad (2.50)$$

ここで，ギヤ系の伝達においてバックラッシュ等の存在により，実際の伝達時におけるギヤ比の関係は，効率  $\eta$  を用いて  $n_{\text{実}} = n_{\text{理}} \times \eta$  のようになる．従って，式 (2.50) は次のようなる．

$$\eta n T(t) = [n^2 \eta J_1 + (J_2 + J_L)] \ddot{\theta}_L(t) + K_L \theta_L(t) \quad (2.51)$$

ギヤが多段になっている場合は，効率  $\eta$  を

$$\eta = \eta_1 \times \eta_2 \times \dots \times \eta_n$$

のように，各かみ合い部毎の効率を掛け合わせたものを採用することになる．

入力軸の動力は  $T(t) \times \dot{\theta}_1(t)$  W であり，出力軸は，定常回転時は

$$T(t) \dot{\theta}_L(t) = \eta n T(t) \dot{\theta}_1(t) \quad (2.53)$$

ここで，効率は次のようにも表現できる．

$$\text{Efficiency } \eta = \left\{ \frac{\text{power delivered to load shaft}}{\text{power supplied at the input shaft}} \right\}_{\dot{\theta}_L=0} \quad (2.54)$$

状態量  $x_1(t) = \theta_L(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{\theta}_L(t)$  を定義して, 式 (2.51) を状態方程式表現すると次式を得る .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}T(t) \text{ where} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_L/J_T & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ n\eta/J_T \end{bmatrix}, \\ x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, J_T = n^2\eta J_1 + J_2 + J_L \end{aligned} \quad (2.55)$$

次に, 図 2.11 に示す。

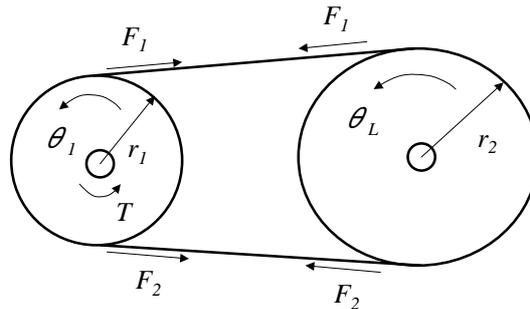


Fig.2.11 Velt system.

ギヤ伝達系と同様, 次のような関係が成立している .

$$\theta_1(t) = n\theta_L(t), \quad \dot{\theta}_1(t) = n\dot{\theta}_L(t), \quad \ddot{\theta}_1(t) = n\ddot{\theta}_L(t) \quad (2.56)$$

ここで,  $n$  はベルト運動比, あるいは, 減速比であり,  $n = r_2/r_1$  となる . この系に対して, 運動方程式を求めると次のようになる .

$$\left. \begin{aligned} [F_1(t) - F_2(t)]r_1 + T(t) &= J_1\ddot{\theta}_1(t) \\ [F_2(t) - F_1(t)]r_2 &= J_L\ddot{\theta}_L(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

この2式からベルト張力  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  を消去すると次式を得る .

$$nT(t) = [n^2 J_1 + J_L] \ddot{\theta}_L(t) \quad (2.58)$$

ギヤ伝達系と同様, 伝達効率  $\eta$  を考慮すると, ベルト伝達装置に対する数学モデルは次式のようなになる .

$$n\eta T(t) = [n^2\eta J_1 + J_L] \ddot{\theta}_L(t) \quad (2.59)$$

以上, 動力伝達に使用されるアクチュエータとして, カムなどのように, 球面 (曲線) 形状に沿って動く運動を用いるものや, 回転運動を直線運動に変換するボールねじタイプなども存在する . 基本的な考え方は, 上記と同様, 幾何学的に定まる変位関係と, 力学的な釣り合い条件を考え, 効率を取り込むことにより, モデル化が可能である .

## 2.6 Single-Axis Rigid Spacecraft

図 2.13 に示す，ある軌道上を飛行する角度姿勢制御モデルを考える．

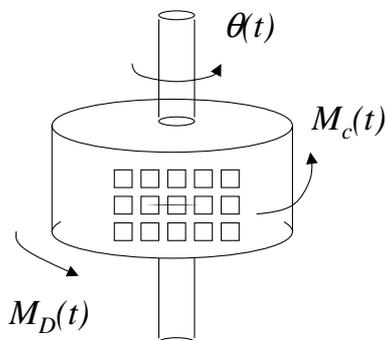


Fig.2.13 Single-axis spacecraft.

質量一定の剛体とし，単軸周り以外の回転運動以外は発生しないと仮定すると，宇宙船の方程式は次式となる．

$$M_c(t) + M_D(t) = J_{CM} \ddot{\theta}(t) \quad (2.60)$$

ここで， $M_c(t)$  は，宇宙船回転軸回りの角度  $\theta$  を指令値  $\theta_{\text{COM}}$  に制御するための制御入力モーメントであり，宇宙船の角運動量変化やガススラスターなどにより与えられる．また， $M_D(t)$  は，外乱モーメント合計， $J_{CM}$  は，宇宙船回転軸回りの慣性モーメントである．

従って，この方程式を状態方程式表示すると次のようになる．

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\dot{\mathbf{x}}(t) \\ 2 \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{A} \\ 2 \times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{x}(t) \\ 2 \times 2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{CM}} & \frac{1}{J_{CM}} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{B} \\ 2 \times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} M_C(t) \\ M_D(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{u}(t) \\ 2 \times 1}} \quad (2.62)$$

したがって，単軸回転運動を考慮した剛体宇宙船に対する式 (2.62) の方程式に対する初期値問題として，次のようなモデル化が可能となる．

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ t_0 \leq t \leq t_F, \quad &x_1(t), \quad x_2(t) \text{ 既知} \\ M_C(t), \quad M_D(t) \text{ 既知, よって } &\mathbf{u}(t) \text{ 既知} \end{aligned}$$

## 2.7 Motion of an aircraft in the Longitudinal-Axis

航空機の昇降舵とスロットル制御入力に対する応答計算を可能とする力学モデルを考える．まず，下記のような仮定をおく．

1. 航空機は剛体
2. 昇降舵の制御角度は  $\pm 0.4$  rad 以内に制限
3. 航空機の運動は平面内

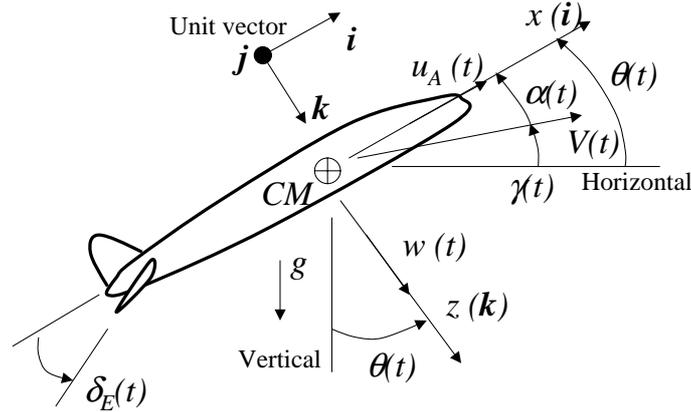


Fig.2.14 Definition of  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ , and  $\delta_E$ .

昇降舵角を  $\delta_E$ ，スロットル制御入力（開閉角）を  $\delta_T$  とし，図 2.14 に示すように，航空機に乗った  $zx$  座標系および対応する単位ベクトル  $\hat{k}, \hat{i}$  を定める．航空機の世界速度ベクトルを  $V(t)$ ， $zx$  方向速度成分をそれぞれ  $w(t), u_A(t)$ ，また，水平線を基準としてピッチ角，アタック角，フライトパス角をそれぞれ  $\theta, \alpha, \gamma$  とおいている．

航空機の世界速度ベクトル  $V(t)$  は次式のように表現できる．

$$V(t) = u_A(t) \hat{i} + w(t) \hat{k} \quad (2.64)$$

従って，慣性空間における加速度ベクトルは，次のようになる．

$$\frac{dV(t)}{dt} = \dot{u}_A(t) \hat{i} + \dot{u}_A(t) \frac{d\hat{i}}{dt} + \dot{w}(t) \hat{k} + w(t) \frac{d\hat{k}}{dt} \quad (2.65)$$

ここで， $zx$  座標系単位ベクトルに関して，下記の関係が成立している．

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = -\dot{\theta}(t) \hat{k}, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = \dot{\theta}(t) \hat{i} \quad (2.66)$$

よって，加速度ベクトルは次式のように表現することができる．

$$\frac{dV(t)}{dt} = [\dot{u}_A(t) + \dot{\theta}(t) w(t)] \hat{i} + [\dot{w}(t) - \dot{\theta}(t) u_A(t)] \hat{k} \quad (2.67)$$

一方，角運動量は次式のようになる．

$$H(t) = I_{yy} \dot{\theta}(t) \hat{j} \quad (2.68)$$

ここで， $I_{yy}$  は， $y$  軸回りの慣性モーメントである．したがって，単位ベクトル  $\hat{j}$  に対応する  $y$  軸方向は一定すると， $d\hat{j}/dt = 0$  となるので，角運動量の時間的変化は次のようになる．

$$\frac{dH(t)}{dt} = I_{yy} \ddot{\theta}(t) \hat{j} \quad (2.69)$$

航空機の質量を  $m$ ，重力加速度を  $g$  とすると，航空機に作用する重力ベクトルは下記のように表現できる．

$$-mg \sin \theta(t) \hat{i} + mg \cos \theta(t) \hat{k} \quad (2.70)$$

推力，空気力学的力は，重力に比べて複雑となるのでここでは次のような簡略化した方法で定式化を行う．すなわち，航空機の面内並進運動に関する方程式をニュートンの第2法則から次のように定める．

$$\begin{aligned} \text{x 軸} : & -mg \sin \theta(t) + X(u_A, w, \delta_E, \delta_T) = m \left[ \dot{u}_A(t) + \dot{\theta}(t) w(t) \right], \\ \text{z 軸} : & mg \cos \theta(t) + Z(u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) = m \left[ \dot{w}(t) - \dot{\theta}(t) u_A(t) \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

ここで， $X(u_A, w, \delta_E, \delta_T)$ ， $Z(u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T)$  は xz 軸方向に働くエンジン推力と周囲流体から受ける空力的な力の合力であり，力学変数  $u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T$  の関数で表現される．同様に，y 軸回りの回転運動に関して次式を定める．

$$\text{y 軸} : M(u_A, w, \dot{w}, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) = I_{yy} \ddot{\theta}(t) \quad (2.72)$$

ここで， $M(u_A, w, \dot{w}, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T)$  は，機体に働く力によって生成される y 軸回りのモーメントの合計である．

ある釣り合い（定常）状態（平衡状態）からの微小変化（攪乱，摂動）を考えることにより，方程式を変形する（摂動法）．制御入力の微小変化を次の様におく．

$$\begin{aligned} \delta_E(t) &= \delta_{E0} + \Delta \delta_E(t) \\ \delta_T(t) &= \delta_{T0} + \Delta \delta_T(t) \end{aligned}$$

同様に，他の変数を次のように平衡状態からの微小変化との和の形で表現する．

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \Delta \theta(t), \dot{\theta}(t) = \Delta \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t) = \Delta \ddot{\theta}(t), \\ \gamma(t) &= \Delta \gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \Delta \dot{\gamma}(t), \\ \alpha(t) &= \alpha_0 + \Delta \alpha(t), \dot{\alpha}(t) = \Delta \dot{\alpha}(t), \\ u_A(t) &= u_{A0} + \Delta u_A(t), \dot{u}_A(t) = \Delta \dot{u}_A(t), \\ w(t) &= w_0 + \Delta w(t), \dot{w}(t) = \Delta \dot{w}(t) \end{aligned} \quad (2.74)$$

平衡状態における飛行においては， $\gamma_0 = 0$  とする．平衡状態からの微小変化  $\Delta \theta(t)$ ， $\Delta u_A(t)$ ， $\Delta w(t)$  など は， $\theta(t)$ ， $u_A(t)$ ， $w(t)$  における摂動と呼ばれる．同様に，推力，空力的な力やモーメント項も次のように表現できる．

$$\begin{aligned} X(u_A, w, \delta_E, \delta_T) &= X_0 + \Delta X(u_A, w, \delta_E, \delta_T) \\ Z(u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) &= Z_0 + \Delta Z(u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) \\ M(u_A, w, \dot{w}, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) &= M_0 + \Delta M(u_A, w, \dot{w}, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) \end{aligned} \quad (2.75)$$

以上の関係を式 (2.71) 第 1 式に代入すると次式を得る．

$$X_0 + \Delta X(u_A, w, \delta_E, \delta_T) = mg \sin(\theta_0 + \Delta \theta(t)) + m \left[ \Delta \dot{u}_A(t) + \Delta \dot{\theta}(t) (w_0 + \Delta w(t)) \right] \quad (2.76)$$

ここで，微小変形を仮定して次の関係を導入する．

$$\cos \Delta \theta(t) \approx 1, \sin \Delta \theta(t) \approx \Delta \theta(t), \Delta \dot{\theta}(t) \Delta w(t) \approx 0 \quad (2.77)$$

よって，式 (2.76) は次のようになる．

$$[X_0 - mg \sin \theta_0] + \Delta X(u_A, w, \delta_E, \delta_T) \approx m \left[ g \cos \theta_0 \Delta \theta(t) + \Delta \dot{u}_A(t) + w_0 \Delta \dot{\theta}(t) \right] \quad (2.78)$$

同様に，z 軸方向に関して次式を得る．

$$[Z_0 + mg \cos \theta_0] + \Delta Z(u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) \approx m \left[ g \sin \theta_0 \Delta \theta(t) + \Delta \dot{w}(t) - u_{A0} \Delta \dot{\theta}(t) \right] \quad (2.79)$$

但し， $\Delta \dot{\theta}(t) \Delta u_A(t) \approx 0$  としている．y 軸回りの回転運動に関しては次式となる．

$$M_0 + M(u_A, w, \dot{w}, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) = I_{yy} \Delta \ddot{\theta}(t) \quad (2.80)$$

水平で等高度の飛行における平衡状態においては，式 (2.78) ~ (2.80) の左辺第 1 項は零と考えればよいので，その状態からの微小変動を考える場合の方程式は，結局次式となる．

$$\begin{aligned} \Delta X(u_A, w, \delta_E, \delta_T) &\approx m \left[ g \cos \theta_0 \Delta \theta(t) + \Delta \dot{u}_A(t) + w_0 \Delta \dot{\theta}(t) \right], \\ \Delta Z(u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) &\approx m \left[ g \sin \theta_0 \Delta \theta(t) + \Delta \dot{w}(t) - u_{A0} \Delta \dot{\theta}(t) \right] \\ M(u_A, w, \dot{w}, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) &= I_{yy} \Delta \ddot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (2.81)$$

一般に,  $\Delta X(u_A, w, \delta_E, \delta_T)$ ,  $\Delta Z(u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T)$ ,  $\Delta M(u_A, w, \dot{w}, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T)$  は微小な力であり, それによって微小な機体加速が生じ, それに伴う機体姿勢, 大気速度に対する微小な変動を生じることになる.

式 (2.81) を更に変形するために, Talor 展開を行う. まず,  $\Delta X(u_A, w, \delta_E, \delta_T)$  は次のように展開できる.

$$\Delta X(u_A, w, \delta_E, \delta_T) = \left[ \frac{\partial X}{\partial u_A} \right]_0 \Delta u_A(t) + \left[ \frac{\partial X}{\partial w} \right]_0 \Delta w(t) + \left[ \frac{\partial X}{\partial \delta_E} \right]_0 \Delta \delta_E(t) + \left[ \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \right]_0 \Delta \delta_T(t) + (\text{高次項}) \quad (2.82)$$

よって, 高次項が微小であるとして無視し, 平衡状態における各変数に対する変化量, 例えば,  $[\partial X / \partial u_A]_0$ , 平衡状態における  $u_A$  に対する  $X(u_{A0}, w_0, \delta_{E0}, \delta_{T0})$  の変化量 (偏導関数) を何らかの形で前もって評価することが可能であれば微小変動の影響として計算することが可能である. すなわち, 関数  $\Delta X(u_A, w, \delta_E, \delta_T)$  を次のように近似する.

$$\Delta X(u_A, w, \delta_E, \delta_T) \approx \left[ \frac{\partial X}{\partial u_A} \right]_0 \Delta u_A(t) + \left[ \frac{\partial X}{\partial w} \right]_0 \Delta w(t) + \left[ \frac{\partial X}{\partial \delta_E} \right]_0 \Delta \delta_E(t) + \left[ \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \right]_0 \Delta \delta_T(t) \quad (2.83)$$

同様に,  $\Delta Z(u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T)$ ,  $\Delta M(u_A, w, \dot{w}, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T)$  に関して次式を得る.

$$\begin{aligned} \Delta Z(u_A, w, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) &\approx \left[ \frac{\partial Z}{\partial u_A} \right]_0 \Delta u_A(t) + \left[ \frac{\partial Z}{\partial w} \right]_0 \Delta w(t) \\ &\quad + \left[ \frac{\partial Z}{\partial \dot{\theta}} \right]_0 \Delta \dot{\theta}(t) + \left[ \frac{\partial Z}{\partial \delta_E} \right]_0 \Delta \delta_E(t) + \left[ \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \right]_0 \Delta \delta_T(t) \\ \Delta M(u_A, w, \dot{w}, \dot{\theta}, \delta_E, \delta_T) &\approx \left[ \frac{\partial M}{\partial u_A} \right]_0 \Delta u_A(t) + \left[ \frac{\partial M}{\partial w} \right]_0 \Delta w(t) + \left[ \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \right]_0 \Delta \dot{w}(t) \\ &\quad + \left[ \frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}} \right]_0 \Delta \dot{\theta}(t) + \left[ \frac{\partial M}{\partial \delta_E} \right]_0 \Delta \delta_E(t) + \left[ \frac{\partial M}{\partial \delta_T} \right]_0 \Delta \delta_T(t) \end{aligned} \quad (2.84)$$

式 (2.83), (2.84) に現れる係数

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial u_A} \right]_0, \left[ \frac{\partial X}{\partial w} \right]_0, \dots, \left[ \frac{\partial Z}{\partial u_A} \right]_0, \left[ \frac{\partial Z}{\partial w} \right]_0, \dots, \left[ \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \right]_0, \left[ \frac{\partial M}{\partial u_A} \right]_0, \dots, \left[ \frac{\partial M}{\partial \delta_T} \right]_0$$

は, 航空機の外形や, 風洞実験の測定値, 飛行テストでのデータに基づいた計算などにより決定される. 更に, 次のようにおく.

$$\begin{aligned} X_{u_A} &= \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial X}{\partial u_A} \right]_0, X_w = \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial X}{\partial w} \right]_0, \dots, X_{\delta_E} = \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial X}{\partial \delta_E} \right]_0, X_{\delta_T} = \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \right]_0 \\ Z_{u_A} &= \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial Z}{\partial u_A} \right]_0, Z_w = \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial Z}{\partial w} \right]_0, \dots, Z_{\delta_T} = \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \right]_0 \\ M_{u_A} &= \frac{1}{I_{yy}} \left[ \frac{\partial M}{\partial u_A} \right]_0, M_w = \frac{1}{I_{yy}} \left[ \frac{\partial M}{\partial w} \right]_0, \dots, M_{\delta_T} = \frac{1}{I_{yy}} \left[ \frac{\partial M}{\partial \delta_T} \right]_0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

式 (2.85) を用いて, 方程式を変形すると次の様な線形連立常微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u}_A(t) &= X_{u_A} \Delta u_A(t) + X_w \Delta w(t) - g \cos \theta_0 \Delta \theta(t) - w_0 \Delta \dot{\theta}(t) + X_{\delta_E} \Delta \delta_E(t) + X_{\delta_T} \Delta \delta_T(t), \\ \Delta \dot{w}(t) &= Z_{u_A} \Delta u_A(t) + Z_w \Delta w(t) - g \sin \theta_0 \Delta \theta(t) + (Z_{\dot{\theta}} + u_{A0}) \Delta \dot{\theta}(t) + Z_{\delta_E} \Delta \delta_E(t) + Z_{\delta_T} \Delta \delta_T(t), \\ \Delta \dot{\theta}(t) &= M_{u_A} \Delta u_A(t) + M_w \Delta w(t) + M_{\dot{w}} \Delta \dot{w}(t) + M_{\dot{\theta}} \Delta \dot{\theta}(t) + M_{\delta_E} \Delta \delta_E(t) + M_{\delta_T} \Delta \delta_T(t) \end{aligned} \quad (2.86)$$

よって, 次の状態変数を考える.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_A(t) \\ \Delta w(t) \\ \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \text{ so that } \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \dot{u}_A(t) \\ \Delta \dot{w}(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \\ \Delta \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

すなわち, 状態方程式表示  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  は次のようになる.

$$\underbrace{\dot{\mathbf{x}}(t)}_{4 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} \quad 4 \times 4} \underbrace{\mathbf{x}(t)}_{4 \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B} \quad 4 \times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \delta_E(t) \\ \Delta \delta_T(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t) \quad 2 \times 1} \quad (2.87)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
a_{11} &= X_{u_A}, a_{12} = X_w, a_{13} = -g \cos \theta_0, a_{14} = -w_0, b_{11} = X_{\delta_E}, b_{12} = X_{\delta_T}, \\
a_{21} &= Z_{u_A}, a_{22} = Z_w, a_{23} = -g \sin \theta_0, a_{24} = (Z_{\dot{\theta}} + u_{A0}), b_{21} = Z_{\delta_E}, b_{22} = Z_{\delta_T}, \\
a_{41} &= (M_{u_A} + M_{\dot{w}}), a_{42} = (M_w + M_w Z_w), a_{43} = -M_w g \sin \theta_0, \\
a_{44} &= [M_{\dot{w}} (Z_{\dot{\theta}} + u_{A0}) + M_{\dot{\theta}}], b_{41} = (M_{\dot{w}} Z_{\delta_E} + M_{\delta_E}), b_{12} = (M_{\dot{w}} Z_{\delta_T} + M_{\delta_T})
\end{aligned} \tag{2.88}$$

さらに, センサー系を考える. ここでは, 対気速度センサーにより  $u_A(t)$  を, ジャイロセンサーにより, ピッチ角  $\theta(t)$  を計測可能であるとし, 校正値をそれぞれ,  $k_{u_A}[V/(m/s)], k_{\theta}[V/rad]$  で与えられると仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}
\text{Airspeed:} \quad e_{u_A}(t) &= k_{u_A} [u_{A0} + \Delta u_A(t)] V \\
\text{Pitch attitude:} \quad e_{\theta}(t) &= k_{\theta} [\theta_0 + \Delta \theta(t)] V
\end{aligned} \tag{2.89}$$

よって, 出力方程式  $\mathbf{y}(t)$  を同様に摂動項を用いて次のように表わすことができる.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta e_{u_A}(t) \\ \Delta e_{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{u_A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

行列表示すると

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \text{ where } \mathbf{C} = \{c_{ij}\} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{u_A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

よって, 航空機 2次元面内運動を調べる摂動モデルとして次のような行列形で表現された微分方程式が求められる.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \\
t_0 \leq t \leq t_F \quad \mathbf{u}(t) &\text{ is known, and} \\
\mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \text{ is known.}
\end{aligned} \tag{2.92}$$