By T. Saito

| 第２回　制御系を内蔵する機械の動力学に関する調査研究分科会 | | | |
|---|---|---|---|
| 話題またはテーマ | ６運動自由度系の力学 | | |
| 発表者 | 国枝正春 | 所属 | 石川播磨重工業　技術研究所 |
| キーワード | 直線・回転連成運動，ジャイロモーメント，ベクトル解析，ラグランジュ方程式 | | |

**概要**


多関節ロボットの剛体運動には，空間における６自由度運動の力学が必要になる．この際の解析方法としては，ベクトル解析に基づく方法とラグランジュ方程式による方法とがよく知られている．

最近，コインの力学として，床上をころがる円板の運動解析が紹介された．(酒井; 機械の研究, Vol.36, No.1, 1984, p.209) 解析方法としては，ベクトル解析から運動方程式を導く方法によっている．

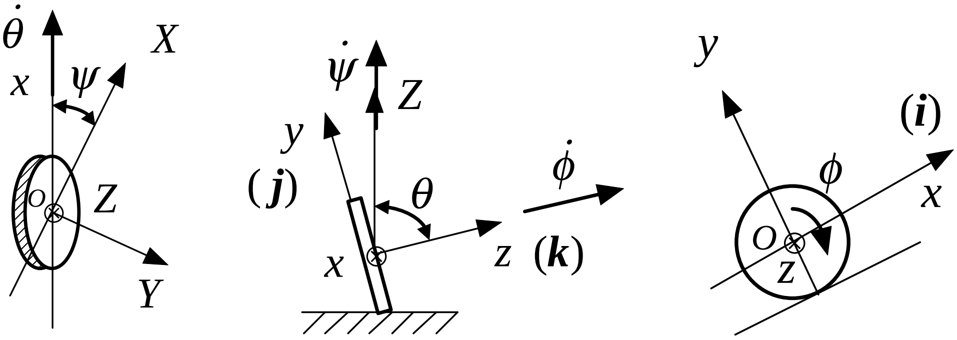
今回，この解析の途中から，ラグランジュ方程式を導入して運動方程式を出してみたところ，ベクトル解析法からのものと異なる結果となった．

酒井教授によれば，”ころがり運動 ”にはラグランジュ法は適さないとのことである．ただ，今までのところ，不適とされる問題の性質，範囲が明確になっていない．

ここでは，両者に生じた差についてのみ説明する．


## １．問題

厚さを




(a) Z 軸に沿って上から見る　(b) x 軸に沿って後ろから見る　(c) z 軸に沿って横から見る

$O-XYZ$ は，$O$ 点のみコインと共に動くか，$XY$ 軸は水平，$Z$ 軸は鉛直の絶対座標系である．$O-xyz$ はコインに伴って動く座標系で，$z$ 軸はコインの面に垂直，$x$ 軸は常に水平とする．$z$ 軸の鉛直線との成す角を $\theta$，$x$ 軸の特定方向 $X$ 軸との成す角を $\psi$，コインの $z$ 軸回りの角速度を $\dot{\phi}$ とする．このとき，$\dot{\theta}$，$\dot{\psi}$，$\dot{\phi}$ の各ベクトルは，上図のごとくになる．

$x$，$y$，$z$ 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とすると，$O-xyz$ 系の絶対座標系に対する角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{k} \tag{1}$$

コインの絶対座標系に対する角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \psi\sin\theta\boldsymbol{j} + \left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

$x$，$y$，$z$ 軸回りのコインの慣性モーメントを $A$，$A$，$C$ とすると，コインの角運動量 $\boldsymbol{L}$ は,

$$\boldsymbol{L} = A\dot{\theta}\boldsymbol{i} + A\dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j} + C\left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{k} \tag{3}$$

系に入る外力は，鉛直下向きの重力 $= -mg\left(\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}\right)$ と，コインと床との間に働く拘束力 $F = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$ の二つである．

重心 $O$ の速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とし，コインの半径を $a$ とすると,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times a\boldsymbol{j} = -a\left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{i} + a\dot{\theta}\boldsymbol{k} \tag{4}$$

ベクトル積の方向は右手ねじの進む方向であり，ベクトル外積の場合，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\times\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$ である．

## ２．ベクトル法による運動方程式の算出

運動方程式を導くには加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{v}}$ が必要であり，これは次のようになる．

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} \tag{5}$$

右辺第１項はベクトル $\boldsymbol{v}$ がスカラー変数 $t$ の関数であるために定義される $\boldsymbol{v}$ の $t$ に関する微分係数であり，第２項はベクトルの大きさが一定であっても，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ を含む座標系が回転することによって生ずるベクトル微分係数である．前者は相対加速度，後者は運搬加速度になる．

$$\dot{\boldsymbol{v}}=-a\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{i}+a\ddot{\theta}\boldsymbol{k}+a\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{i}+\left(\dot{\theta}\boldsymbol{i}+\dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j}+\dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{k}\right)\times\left\{-a\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{i}+a\dot{\theta}\boldsymbol{k}\right\}$$

$$=\left(-a\ddot{\phi}-a\ddot{\psi}\cos\theta+2\dot{\psi}\sin\theta a\dot{\theta}\right)\boldsymbol{i}+\left\{-\dot{\psi}\cos\theta a\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)-\dot{\theta}a\dot{\theta}\right\}\boldsymbol{j}+\left\{a\ddot{\theta}+\dot{\psi}\sin\theta a\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\right\}\boldsymbol{k} \tag{6}$$

外力と加速度の方向を合わせ考えると，運動方程式は次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l}-ma\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta-2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\right)=F_x\\-ma\left\{\dot{\theta}^2+\dot{\psi}\cos\theta\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\right\}=F_y-mg\sin\theta\\ma\left\{\ddot{\theta}+\dot{\psi}\sin\theta\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\right\}=F_z-mg\cos\theta\end{array}\right\} \tag{7}$$

コインの角運動量 $L$ についても，式 (5) と同様に，

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\frac{\partial L}{\partial t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L} \tag{8}$$

式 (1)，(2) を使って式 (8) を計算すると

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{L}}&=A\ddot{\theta}\boldsymbol{i}+A\ddot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j}+C\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{k}+A\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{j}-C\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{k}\\&+\left(\dot{\theta}\boldsymbol{i}+\dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j}+\psi\cos\theta\boldsymbol{k}\right)\left\{A\dot{\theta}\boldsymbol{i}+A\dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j}+C\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{k}\right\}\\&=\left\{A\ddot{\theta}-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+C\dot{\psi}\sin\theta\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\right\}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

$$+\left\{A\ddot{\psi}\sin\theta+2A\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta-C\dot{\theta}\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\right\}\boldsymbol{j}+\left\{C\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\right)\right\}\boldsymbol{k} \tag{9}$$

一方，外力のモーメントを $\boldsymbol{N}$ とすると，

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{N}=-a\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{F}=-a\boldsymbol{j}\left(F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}\right)=F_xa\boldsymbol{k}-F_za\boldsymbol{i} \tag{10}$$

式 (9)，(10) より

$$\left.\begin{array}{l}A\ddot{\theta}-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+C\dot{\psi}\sin\theta\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)=-F_za\\A\ddot{\psi}\sin\theta+2A\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\ -C\dot{\theta}\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)=0\\C\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\right)=F_xa\end{array}\right\} \tag{11}$$

式 (7)，(11) から拘束力を消去すべく，まず $F_x$ を消すと

$$C\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\right)+ma^2\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta-2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\right)=0$$

すなわち

$$\left(C+ma^2\right)\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\right)=ma^2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta \tag{12}$$

$F_z$ を消すと，

$$A\ddot{\theta}-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+C\dot{\psi}\sin\theta\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)+ma^2\left\{\ddot{\theta}+\dot{\psi}\sin\theta\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\right\}+mga\cos\theta=0$$

すなわち

$$\left(A+ma^2\right)\ddot{\theta}-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+\left(C+ma^2\right)\dot{\psi}\sin\theta\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)+mga\cos\theta=0 \tag{13}$$

式 (11) 中の第２式を再掲すると

$$A\ddot{\psi}\sin\theta+2A\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\ -C\dot{\theta}\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)=0 \tag{14}$$

式 (12)，(13)，(14) から，$\theta$，$\phi$，$\psi$ を求めることができるはずである．

**３．ラグランジュの方程式からの運動方程式の算出**

この系の運動エネルギーを $T$ とすると，式 (3)，(4) から

$$2T=A\dot{\theta}^2\sin^2\theta+C\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)^2+ma^2\left(\dot{\phi}+\dot{\phi}\cos\theta\right)^2+ma^2\dot{\theta}^2 \tag{15}$$

一方，ポテンシャルエネルギー $U$ は

$$U=-mga\left(1-\sin\theta\right) \tag{16}$$

したがって，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0$$

なるラグランジュの方程式に，式 (15)，(16) を代入すると，まず $q_i=\theta$ では

$$\left(A+ma^2\right)\ddot{\theta}-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+\left(C+ma^2\right)\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\dot{\psi}\sin\theta+mga\cos\theta=0 \tag{17}$$

よって，式 (13) と同一となる．次に，$q_i=\phi$ では

$$\left(C+ma^2\right)\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right)=0 \tag{18}$$

となり，式 (12) と右辺が違うという結果となる．最後に，$q_i=\psi$ では，

$$A\ddot{\psi}\sin^2\theta+2A\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+\left(C+ma^2\right)\left\{\left(\ddot{\phi}+\ddot{\phi}\cos\theta-\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\right)\cos\theta-\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\dot{\theta}\sin\theta\right\}=0 \tag{19}$$

この式に，式 (18) を代入すると

$$A\ddot{\psi}\sin\theta+2A\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta-C\dot{\theta}\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)=ma^2\dot{\theta}\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\right) \tag{20}$$

となり，この場合も，式 (14) と右辺が異なる結果となる．

**４．まとめ**

このように，ベクトル法とラグランジュ法とで得られる運動方程式に相違が生じる．この問題はすでに回転体の力学では良く知られた問題らしく，(松浦；多自由度防振支持回転機械の危険速度通過に関する研究，機構論 No.810-14('81-10)）座標の取り方が良くないと，この種の問題が起こるとされている．すなわち，一般座標として選ぶためには，各々が独立であるべきで，誘導量的な関係があってはならないとされている．

これとは別に，先に紹介した文献の著書酒井教授によれば，水平な面上をころがる円板の場合には，ころがるという条件だけでは拘束の条件として，微分方程式を解くには不十分で，これを "非ホロノミックな場合 "といい，通常の方法ではラグランジュは適用できないとのことである．

# 参考文献

[1] 酒井；おもちゃのダイナミクス **機械の研究**, Vol.36, No.1 ('84-1), p.209.

[2] G. W. Housner, D. E. Hudson; Applied Mechanics, Dynamics *Maruzen*, p.248.

**課題**　ベクトル法（一般的な定式化）と Lagrange の方程式を用いて運動方程式を導出した場合，微妙に基礎方程式に違いが生じることを以下の問題で確認せよ．

**問題** (平成 8 年度大学院工学研究科博士前期課程入学試験 機械力学より)

図は，質量の無視できる長さ $l$ の棒と質量 $m$ の質点からなる単振子を表し，その単振子のつるす点が，ばね定数 $\frac{k}{2}$ のばねによって両側から質量の無視できる支点によって支持され，水平 (左右) に動くことのできるようになった系を表している．図で示される系に対する運動方程式を導きなさい．

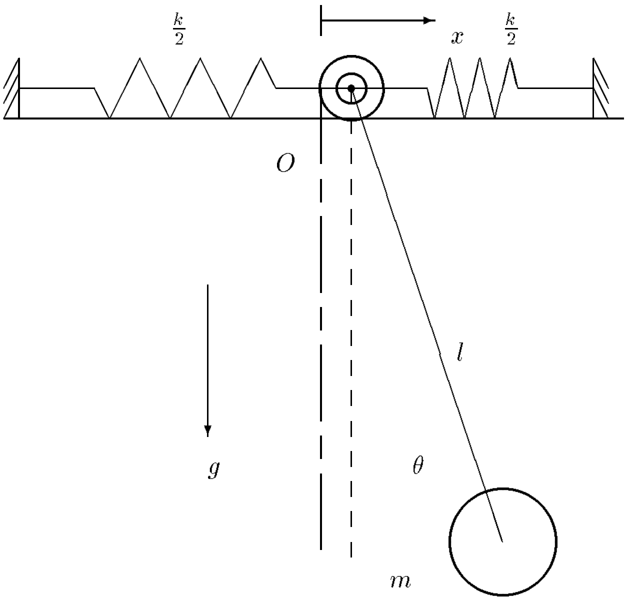



図 水平方向にバネ支持された単振子