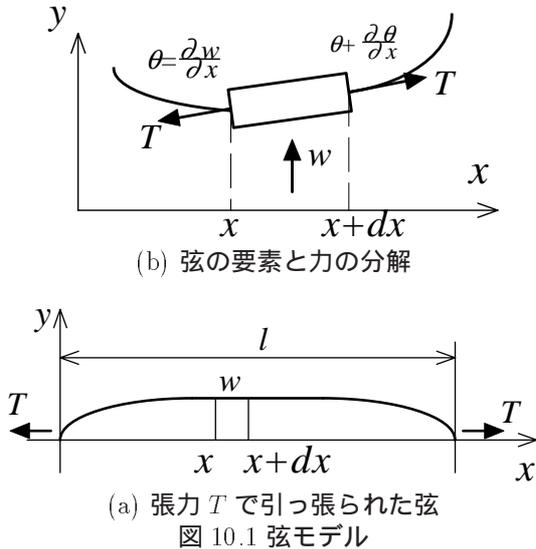


10. 連続体へのモデル化 I (弦の横振動, 棒の縦振動など)

機械構造物などのモデル化において集中系モデルより質量と弾性が分布している連続体として解析する方が簡便な場合がある.

10.1 弦モデル



左図のように, 長さ  $l$ , 線密度  $\rho$  の弦が張力  $T$  が生じた状態で両端を固定されているとする. 上下方向変位を  $w$  として, 図 (b) のように長さ  $dx$  の微小要素に対する運動方程式を考えると

$$\begin{aligned} \rho dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= T \sin \left( \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) - T \sin \theta \\ &\doteq T \left( \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) - T \theta \\ &= T \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = T \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \end{aligned}$$

両辺から  $dx$  を除すと次式を得る.

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{10.1}$$

あるいは  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  と置くと,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{10.2}$$

即ち, 2 階の線形偏微分方程式 (双曲型), 波動方程式 (wave equation) と呼ばれる形となる.

10.2 弦の波動

波動方程式の解は,  $f_1, f_2$  が任意の関数であるとき

$$w(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

を満足する. (代入すれば自明)

$$\begin{aligned} x = ct \text{ のとき } f_1(x - ct) = \text{const} &\Rightarrow x \text{ 軸方向に伝わる波動} \\ x = -ct \text{ のとき } f_2(x + ct) = \text{const} &\Rightarrow -x \text{ 軸方向に伝わる波動} \end{aligned}$$

ここで,  $c$  は波動の伝わる速度であり,  $f_1, f_2$  に依存せず,  $T$  と  $\rho$  で決まる.

10.3 弦の自由振動

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{10.2}$$

なる偏微分方程式を解くためには,  $t$  と  $x$  に関する初期値が必要である. 物理的な意味では, 時間  $t$  に関する初期条件と空間座標  $x$  に関する境界条件である. 系の固有特性 (固有振動数と固有モード) の決定には境界条件が必要であり, 動的な応答を求めるためには, 時間に関する初期条件が必要となるのである.

図のように, 両端を固定されている場合

$$w(0, t) = w(l, t) = 0 \tag{10.3}$$

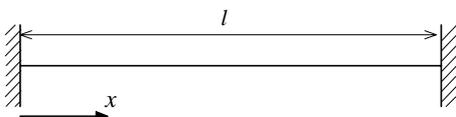


図 10.2 両端を固定された弦

と置くことができる (弦モデルにおける両端固定の境界条件). さらに, こういった空間と時間に関する独立変数 ( $x$  と  $t$ ) を有する偏微分方程式に対する振動特性を調べる場合には, まず, 系が調和振動 (規準振動とも呼ばれる) すると仮定し, 以下の変数分離形を仮定する.

$$w(x, t) = W(x) a(t) \tag{10.4}$$

式 (10.4) を式 (10.3) に代入すると

$$W(x) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} a(t)$$

$$\therefore \frac{1}{a(t)} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} = c^2 \frac{1}{W(x)} \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \quad (10.5)$$

式 (10.5) の左辺は時間  $t$  のみの関数，一方，右辺は位置座標  $x$  のみの関数となり，両辺が等しくなるのは定数のときのみと考えることができる．従って，時間関数  $a(t)$  が調和 (規準) 振動をする場合，

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a(t)} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} &= -\omega^2 \\ c^2 \frac{1}{W(x)} \frac{d^2 W(x)}{dx^2} &= -\omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

と置くことができる．第 1 式を変形すると

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \omega^2 a(t) = 0$$

であり，一般解は

$$a(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (10.7)$$

となり，角振動数  $\omega$  で調和振動するとした仮定が正しいことがわかる．ここで， $A, B$  は  $t = 0$  における初期条件によって定められる未定係数である．一方，式 (10.6) の第 2 式から

$$\frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} W(x) = 0$$

となるので，同様に， $W(x)$  の一般解は，

$$W(x) = W_1 \cos \frac{\omega}{c} x + W_2 \sin \frac{\omega}{c} x \quad (10.8)$$

と表現できる．ここで， $W_1, W_2$  は境界条件により定められる未定係数である．従って，式 (10.3) の境界条件  $x = 0, l$  において  $W(0) = W(l) = 0$  を適用すると式 (10.8) は，

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= 0 \\ W_1 \cos \frac{\omega}{c} l + W_2 \sin \frac{\omega}{c} l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

となる．従って，この系は調和 (規準) 振動をする場合，

$$W_2 \sin \frac{\omega}{c} l = 0 \quad (10.10)$$

の関係が成立していることになる． $W_1$  であるから式 (10.10) において  $W_2 = 0$  とすると式 (10.8) は，無条件に  $W(x) = 0$  となり，無意味な解となる．従って，この系が調和 (規準) 振動をする場合には以下の関係が成立している必要がある．

$$\sin \frac{\omega}{c} l = 0 \quad (10.11)$$

即ち，これが両端を固定された弦の振動数方程式であり，この関係を満足する  $\omega$  を  $\omega_n$  と置くとこの振動数，即ち，固有角振動数は以下の関係が成立していることになる．

$$\frac{\omega_n}{c} l = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10.12)$$

よって，ある系を連続体の弦モデルに仮定して調和 (規準) 振動する場合を考えると，そのときの振動数は飛び飛びの値を取ることがわかる．即ち， $n$  次の固有振動数は

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{n\pi}{l} c = \frac{nc}{2l} \quad (10.13)$$

与えられることになる．また，対応する固有モードは，式 (10.8) から  $W_2$  を任意の定数として，

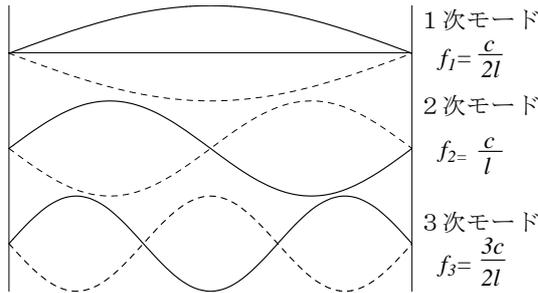


図 10.3 両端固定の弦の振動モード

$$W(x) \equiv W_n(x) = W_2 \sin \frac{\omega_n l}{c} x \quad (10.14)$$

と表すことができるので、例えば、 $W_2 = 1$  とすると対応する  $n$  次の固有モード関数は

$$\left. \begin{aligned} W_1(x) &= \sin \frac{c}{l} x = \sin \frac{\pi}{l} x \\ W_2(x) &= \dots = \sin \frac{2\pi}{l} x \\ W_3(x) &= \dots = \sin \frac{3\pi}{l} x \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

となる。

#### 10.4 棒の縦振動

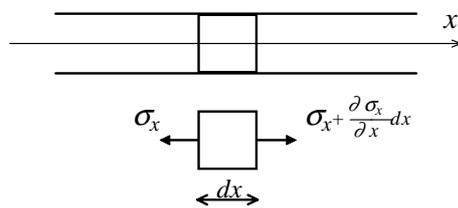


図 10.4 棒の縦振動モデル

図 10.4 に示すように密度  $\rho$ ，断面積  $A$ ，縦弾性係数  $E$  の棒の長手方向（軸方向）の運動を考える．軸方向変位を  $u$  とし，軸方向応力  $\sigma_x$  を取り，図のように  $dx$  なる微小要素の釣り合いを考えると

$$\begin{aligned} \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) A \\ \therefore \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (10.16)$$

軸方向の歪  $\varepsilon_x$  は，

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10.17)$$

であり，応力と歪の関係は， $\sigma_x = E \varepsilon_x$  であるから，

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (E \varepsilon_x) = P_{xx} \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \right) = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10.18)$$

ゆえに，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

となるので，弦の運動と同様の議論が可能となる。

#### 10.5 丸棒のねじり振動

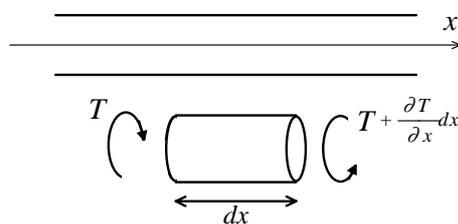


図 10.5 丸棒のねじり振動モデル

密度  $\rho$ ，極慣性モーメント  $I_p$ ，横弾性係数  $G$  の丸棒に対して，軸方向  $x$  に関するねじれ角  $\theta$  を考える．微小要素  $dx$  に作用するトルク  $T$  による回転（ねじれ）運動に対する釣り合いを考えると

$$\begin{aligned} \rho I_p dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T \\ \therefore \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (10.19)$$

軸に作用するトルク  $T$  とねじれ角  $\theta$  の関係は，

$$T = G I_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (10.20)$$

であるから，

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (10.21)$$

即ち,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (10.22)$$

となり, 前と同様の波動方程式の形となる.

### 10.6 気(流体)柱の振動

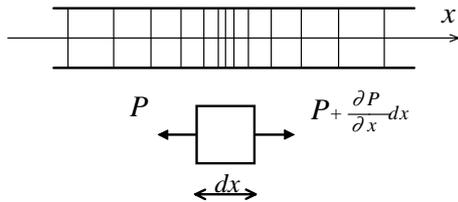


図 10.6 流体柱の振動モデル

密度  $\rho$  の気(流)体が断面積  $A$  の管路内を運動する場合を考えると

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx - P \right) A$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (10.23)$$

ここで, 圧力  $P$  と体積膨張率  $\Delta = \text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x}$  の間には

$$P = K \Delta = K \frac{\partial u}{\partial x}, \quad K; \text{体積膨張率} \quad (10.24)$$

の関係があるので,

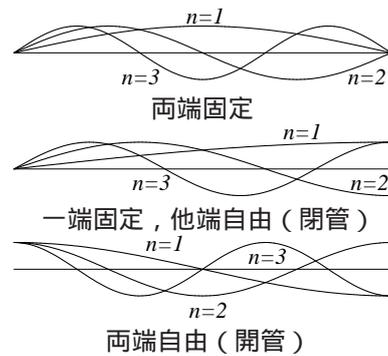
$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10.25)$$

即ち,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (10.26)$$

この方程式もまた波動方程式の形となり, 同様の議論が可能となる. 以下に代表的な境界条件に対する固有振動数と固有モードを示す.

境界条件	固有振動数	固有モード ( $n = 1, 2, \dots$ )
両端固定	$f_n = \frac{c}{2l} n$	$\sin \frac{n\pi}{l} x$
一端固定 他端自由	$f_n = \frac{c}{4l} (2n - 1)$	$\sin \frac{(2n-1)\pi}{l} x$
両端自由	$f_n = \frac{c}{2l} n$	$\cos \frac{n\pi}{l} x$



ここで

$$c^2 = \begin{cases} \frac{T}{\rho} & (\text{弦*の横振動}) \\ \frac{E}{\rho} & (\text{棒の縦振動}) \\ \frac{G}{\rho} & (\text{棒のねじり振動}) \\ \frac{K}{\rho} & (\text{流体柱の縦振動}) \end{cases}$$

\*弦の場合の  $\rho$  のみ線密度 (単位長さ当りの質量)

## 11. 連続体へのモデル化 (梁の曲げ振動)

### 11.1 運動方程式

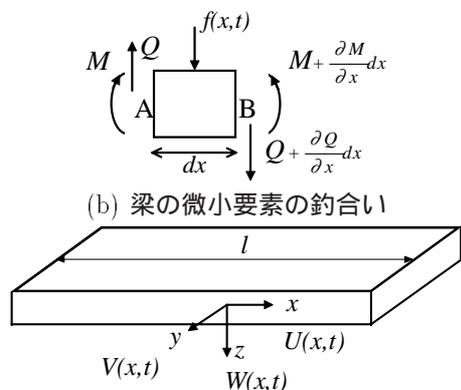


図 11.1 流体柱の振動モデル

左図に示すように、まっすぐな梁の曲げ振動について考える。梁の曲げの問題では材料力学で教えるところの次の式を用いる。即ち、座標点  $x$  における撓み変位を  $w$  とするとき、その地点に発生する曲げモーメント  $M$  は、

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (11.1)$$

ここで、 $E, I$  は、梁の縦弾性係数、断面二次モーメントである。図 (b) のように微小要素に作用する力を考え、梁の密度、断面積をそれぞれ  $\rho, A$  とする。ここで、梁には単位長さ当り  $f(x, t)$  の力が作用しているとすると、梁の微小要素の上下方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx - Q + f(x, t) dx \\ \therefore \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial Q}{\partial x} + f(x, t) \end{aligned} \quad (11.2)$$

一方、モーメントの釣合いは、回転慣性を無視すると右端 B 点回りのモーメントの釣合いは

$$\begin{aligned} M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - Q dx &= 0 \\ \therefore Q &= \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (11.3)$$

従って、式 (11.2), (11.3) より

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f(x, t)$$

即ち、まっすぐな梁の曲げ振動を記述する運動方程式は次式となる。

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (11.4)$$

### 11.2 梁の自由振動に対する一般解

$f(x, t) = 0$  とおき、梁の自由振動について考える。即ち、

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

の性質について調べる。まず、解を変数分離形で表すと

$$w(x, t) = W(x) a(t) \quad (11.5)$$

式 (11.5) を代入すると

$$W(x) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} a(t) = 0$$

変形すると

$$\frac{EI}{\rho A W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{a(t)} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} \quad (11.6)$$

となり，左辺は  $x$  のみの関数，右辺は  $t$  のみの関数であるから両辺が等しくなるのは定数のときのみ．即ち，

$$\left. \begin{aligned} \frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} &= \omega^2 \\ -\frac{1}{a(t)} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} &= \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

式 (11.7) 第 2 式は，調和 (規準) 振動を表す微分方程式であり，初期条件によって定められる未定係数  $A$ ， $B$  を用いて

$$a(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (11.8)$$

一方，式 (11.7) 第 1 式は変形すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) &= 0 \\ \beta^4 &= \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

となるから， $W(x) = e^{\lambda x}$  とおき，特性方程式を求めると

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= \beta^4 \\ \therefore \lambda &= \pm \beta, \pm j\beta \end{aligned} \quad (11.10)$$

よって，式 (11.9) に対する一般解は

$$W(x) = c_1 e^{\beta x} + c_2 e^{-\beta x} + c_3 e^{j\beta x} + c_4 e^{-j\beta x} \quad (11.11)$$

あるいは

$$W(x) = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x + c_3 \cosh \beta x + c_4 \sinh \beta x \quad (11.12)$$

となる．ここで， $c_1 \sim c_4$  は，境界条件により定められる未定係数である．

### 11.3 梁の境界条件

梁の運動は力の釣合いとモーメントの釣合いが関係してくるので，両端における境界条件に関してもそれらに対応した条件が必要となる．以下に代表的な境界条件を示す．

#### 1) 自由 (支持)

梁が支えていないような状態では，そこに力，モーメントに関する反力が発生していないと考えられる．従って，自由 (支持) な場合の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{曲げモーメントが零} \quad M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0 \\ \text{剪断力が零} \quad Q = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 &\Rightarrow \frac{d^3 W(x)}{dx^3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

#### 2) 単純支持

梁をばんとどこかに置いたような状態あるいはピン止めしてような場合の条件を単純支持と呼ぶ．従って，変位することはできないが，回転は自由にできる境界条件となる．即ち，

$$\left. \begin{aligned} \text{変位が零} \quad w = 0 &\Rightarrow W(x) = 0 \\ \text{曲げモーメントが零} \quad M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

#### 3) 固定支持

固定支持は梁をがっちり固定した場合の条件を意味し，そこで，変位することはおろか回転さえも許さない条件とする．即ち，

$$\left. \begin{aligned} \text{変位が零} \quad w = 0 &\Rightarrow W(x) = 0 \\ \text{撓み角が零} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \frac{dW(x)}{dx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

#### 4) その他

境界上で変位の条件もしくは，力学的な条件を与える必要があり，撓み変位  $w$  と剪断力  $Q$ ，撓み角  $\frac{\partial w}{\partial x}$  とモーメント  $M$  がそれぞれ力の釣合いとモーメントの釣合いに対応した境界条件となるのでそれらのどちらかがそれぞれ与えられれば，運動の状態が定まることになる．

#### 11.4 振動数方程式

ここでは、両端固定の境界条件に対する振動数方程式を誘導する。即ち、両端固定の境界条件は  $x = 0, l$  において、撓みと撓み角が零になればよいので

$$W(0) = W(l) = 0, \quad \frac{dW(0)}{dx} = \frac{dW(l)}{dx} = 0 \quad (11.16)$$

なる条件となる。ここで、式 (11.12) より

$$\frac{dW(x)}{dx} = \beta(-c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x + c_3 \sinh \beta x + c_4 \cosh \beta x) \quad (11.17)$$

より、式 (11.16) の条件は

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 \\ c_2 + c_4 &= 0 \\ c_1 \cos \beta l + c_2 \sin \beta l + c_3 \cosh \beta l + c_4 \sinh \beta l &= 0 \\ -c_1 \sin \beta l + c_2 \cos \beta l + c_3 \sinh \beta l + c_4 \cosh \beta l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

となる。行列表示すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos \beta l & \sin \beta l & \cosh \beta l & \sinh \beta l \\ -\sin \beta l & \cos \beta l & \sinh \beta l & \cosh \beta l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.19)$$

従って、 $c_1 \sim c_4$  が無意味な解を持たない条件は、式 (11.19) の係数行列式が零となることであるから、

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos \beta l & \sin \beta l & \cosh \beta l & \sinh \beta l \\ -\sin \beta l & \cos \beta l & \sinh \beta l & \cosh \beta l \end{vmatrix} = 0 \\ \therefore & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \sin \beta l & \cosh \beta l & \sinh \beta l \\ \cos \beta l & \sinh \beta l & \cosh \beta l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos \beta l & \sin \beta l & \sinh \beta l \\ -\sin \beta l & \cos \beta l & \cosh \beta l \end{vmatrix} = 0 \\ \therefore & \begin{vmatrix} \cosh \beta l & \sinh \beta l \\ \sinh \beta l & \cosh \beta l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin \beta l & \cosh \beta l \\ \cos \beta l & \sinh \beta l \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos \beta l & \sinh \beta l \\ -\sin \beta l & \cosh \beta l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos \beta l & \sin \beta l \\ -\sin \beta l & \cos \beta l \end{vmatrix} = 0 \\ \therefore & \cosh^2 \beta l - \sinh^2 \beta l + \sin \beta l \sinh \beta l - \cos \beta l \cosh \beta l - \cos \beta l \cosh \beta l - \sin \beta l \sinh \beta l + \cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l = 0 \end{aligned}$$

即ち、次の振動数方程式を得る。

$$1 - \cos \beta l \cosh \beta l = 0 \quad (11.20)$$

式 (11.20) を満足する  $\beta$  を小さい順に  $\beta_n$  とするとこの値は

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 l &= 4.7300 \\ \beta_2 l &= 7.8532 \\ \beta_3 l &= 10.9956 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

式 (11.21) に対応させて、式 (11.9) 第 2 式より定められる  $\omega$  を  $\omega_n$  とすると  $\omega_n$  は  $n$  次の固有角振動数なる。即ち、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \beta_n^2 \quad (11.22)$$

により  $n$  次の固有角振動数を求めることができる。ここで、式 (11.22) において境界条件に依存するのは  $\beta_n$  の値のみであり、他のパラメータは梁の材質、形状により決定付けられるものである。また、この固有角振動数に対応する固有モードは式 (11.18) あるいは式 (11.19) により、例えば、 $c_2$  に対する  $c_1, c_3, c_4$  の比を求めることにより定めることができる。即ち、式 (11.18) の最初の第 2 式からの

$$c_3 = -c_1, \quad c_4 = -c_2$$

を第 3 式に代入すると

$$c_1 (\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l) + c_2 (\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l) = 0$$

よって,

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} c_2 \\ c_3 &= -\frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} c_2 \\ c_4 &= -c_2 \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

となり, 固有モード関数は

$$W_n(x) = C_n \left[ \sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) \right] \quad (11.24)$$

と表すことができ, 具体的に  $n = 1 \sim 3$  を計算し, 図示すると図 11.2 のようになる.

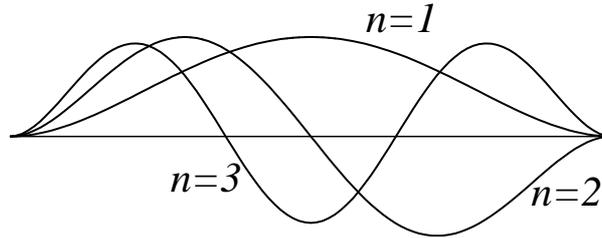


図 11.2 両端固定梁の振動モード (1 次から 3 次まで)

振動モードの大きさは任意であるので  $C_n$  の値は任意に定めることができ, 例えば,  $\max \{W(x)\} = 1$  とすれば良い. 他の境界条件についても同様に, 振動数方程式, その解及び固有モード関数を定めることができる. いくつかの境界条件に対する振動数方程式とその解を下表に示す.

Table 1: 各境界条件に対する振動数方程式と解

境界条件	振動数方程式	モード関数	解
両端単純支持	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n \sin \beta_n x$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$
両端固定支持	$1 - \cos \beta_n l \cosh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n \left[ \sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) \right]$	$\beta_1 l = 4.7300$ $\beta_2 l = 7.8532$ $\beta_3 l = 10.9956$
一端固定他端支持	$1 + \cos \beta_n l \cosh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n \left[ \sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \frac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l} (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) \right]$	$\beta_1 l = 1.8751$ $\beta_2 l = 4.6941$ $\beta_3 l = 7.8548$
両端自由	$1 - \cos \beta_n l \cosh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n \left[ \sin \beta_n x + \sinh \beta_n x - \frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l} (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x) \right]$	$\beta_0 l = 0.0000$ $\beta_1 l = 4.7300$ $\beta_2 l = 7.8532$ $\beta_3 l = 10.9956$

## 11.5 Hamilton の原理を用いた運動方程式の導出

11.1 では、微小要素の力の釣り合いを考えることにより運動方程式を導出した．本節では、連続体における Lagrange の運動方程式と同様のエネルギー原理である Hamilton の原理を用いて運動方程式を導出する．本手法は、有限要素法などの重み付き残差法などでの定式化においても有効な手法の一つである．

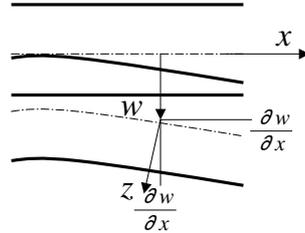


図 11.3 梁断面の変形状態の仮定

一般の梁理論 (Bernoulli-Euler 梁と呼ばれる) では、梁軸方向座標  $x$  のある点が垂直方向に  $w(x, t)$  撓むという一次元の変形を考え、さらに、図 11.3 に示すように、梁断面の中央面に立てた垂線  $x$  は変形後も垂線を保ったまま変形するという Kirchhoff-Love の仮説が適用される．このとき、 $w$  の撓み変形を考えた地点は、 $\partial w / \partial x$  の傾斜角を有するので、そこに立てた垂線もこの角度だけ回転することになる．従って、この断面の  $z$  軸方向のある点の  $x$  軸方向変位  $U$  は、

$$U = -z \sin \frac{\partial w}{\partial x} \approx -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (11.24)$$

となるので、軸方向のひずみ  $\varepsilon_x$  は、

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (11.25)$$

と表現できる．したがって、系全体のひずみエネルギー  $E_V$  は

$$E_V = \frac{1}{2} \int_x \int_y \int_z \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz \quad (11.26)$$

ここで、梁理論では応力ひずみ関係は、ヤング率  $E$  を用いて

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (11.27)$$

したがって、式 (11.26) は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} E_V &= \frac{1}{2} \int_x \int_y \int_z E \varepsilon_x^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_x \int_y \int_z E z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_x EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (11.28)$$

ここで、

$$I = \int_y \int_z z^2 dy dz \quad (2.29)$$

は、いわゆる断面二次モーメントである．式 (11.28) の第 1 変分を取り、部分積分を実行すると次のようになる．

$$\begin{aligned} \delta E_V &= \int_x EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \int_x EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_x - \int_x EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) dx \\ &= \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_x - \left[ EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right]_x + \int_x EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx \end{aligned} \quad (11.30)$$

一方，運動エネルギー  $E_T$  は，変形に伴う速度は  $\partial w / \partial t$  であるので，

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{2} \int_x \int_y \int_z \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_x \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (11.31)$$

ここで，

$$A = \int_y \int_z dy dz \quad (11.32)$$

は，断面積である．したがって，時間積分をまで考慮して第1変分を取る．

$$\begin{aligned} \int_x \delta E_T dt &= \rho A \int_t \int_x \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt \\ &= - \int_t \int_x \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dt \end{aligned} \quad (11.33)$$

さらに，梁の単位長さ辺りに作用している力  $f(x, t)$  による仕事によるエネルギー  $E_W$  は，

$$E_W = \int_x f(x, t) w dx \quad (11.34)$$

よって，第1変分は

$$\delta E_W = \int_x f(x, t) \delta w dx \quad (11.35)$$

したがって，式 (11.30), (11.33), および，式 (11.35) に次の Hamilton の原理を適用する．

$$\delta \int_t (E_T - E_V) dt + \int_t \delta E_W dt = 0 \quad (11.36)$$

$w$  の変分  $\delta w$  は任意の値をとることから，次のような運動方程式が得られる．

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (11.37)$$

当然のごとく，この方程式は，式 (11.4) と一致している．また，このとき，次のような梁の両端で成立すべき境界条件が同時に求められる．

$$\left. \begin{aligned} \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_x &= 0 \\ \left[ EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right]_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.38)$$

が求められる．式 (11.38) の第1式は，梁の両端において，モーメントに対応する  $EI \partial^2 w / \partial x^2 = 0$  となるか，梁の傾きが定められなければならない（方程式を解くことができない）ことを示しており，第2式は，剪断力に対応する  $EI \partial^3 w / \partial x^3 = 0$  となるか，梁のたわみが定められなければならないことを示している．