機械工学演習 B (2) 例題

(a) 図 (a) に示す自動車の前後輪の沈み込み量（変位）を測定したところ，平均 $\delta = 34\mathrm{mm}$ であったとする．前後輪の沈み込み量はすべて同じと仮定し，１自由度系と仮定した場合の自動車の固有振動数を求めよ．

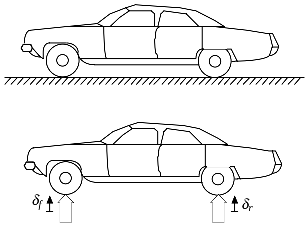

Fig.(a)

（解答例）前後輪のばね定数をそれぞれ k_f，k_r，車体質量を m とすると，自動車の上下方向運動のみを考えた１自由度系に対するばね定数は，$k = 2 \times (k_f + k_r)$ となる．したがって，系の固有振動数 f_n は次式となる．

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2 \times (k_f + k_r)}{m}}\ \mathrm{Hz}$$

ここで，自重による沈み込み量 δ との関係から

$$mg - 2 \times (k_f + k_r)\,\delta = 0$$
$$\therefore\ \frac{2 \times (k_f + k_r)}{m} = \frac{g}{\delta}$$

よって，固有振動数の計算式が次のように求められ，具体的に数値を代入して計算すると

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}} \fallingdotseq 2.7\ \mathrm{Hz}$$

ここで，自動車の車体質量を $m = 1500\mathrm{kg}$ とすると，各サスペンションのばね定数は $k \approx k_f \approx k_r$ とすると

$$k = \frac{m}{4}\left(2\pi f_n\right)^2 \fallingdotseq 1.08 \times 10^5\ \mathrm{N/m} = 11\mathrm{kgf/mm}$$

となる．一般に，乗用車のサスペンションばね定数は，$k_f = 12 \sim 14\,\mathrm{kgf/mm}$，$k_r = 10 \sim 12\,\mathrm{kgf/mm}$ 程度に設定されている．

(b) 図 (b) に示す単振り子と剛体振り子の運動方程式を導出し，固有振動数について考察せよ．

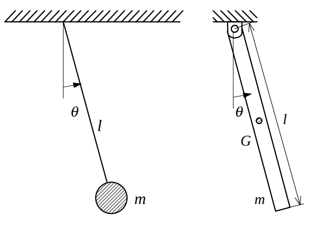

Fig.(b)

（解答例）

(b) 単振り子に関しては，支点回りの慣性モーメントは，$I = ml^2$ であり，支点回りに作用するモーメントは，重力 mg と支点との距離 $l\sin\theta$ の積によるもののみであるので，運動方程式は，次のようになる．

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$
$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$
$$\therefore\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

一方，剛体振り子に関しては，支点回りの慣性モーメントは，剛体に密度を ρ，断面積を A とすると，$m = \rho A l$ より，

$$I = \int_0^l \rho A x^2 dx = \rho A\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{\rho A l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

重力は，重心 G の位置，すなわち，支点から $\frac{l}{2}$ の位置に作用するので，支点回りのモーメントは，$\frac{1}{2}mgl\sin\theta$ となる．したがって，運動方程式は次のようになる．

$$I\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}mgl\sin\theta$$
$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}mgl\sin\theta$$
$$\therefore\ \ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0$$

よって，微小振動を仮定すると $\sin\theta \approx \theta$ となるので，運動方程式はそれぞれ次のようになる．

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0$$

すなわち，固有振動数はそれぞれ次のようになる．

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ \ \therefore f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}\ \ \therefore f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

よって，$f_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}f_1 \fallingdotseq 1.22 f_1$ となり，剛体振り子の方が振動数はやや大きくなる．これは，剛体の重心位置と慣性モーメントが関係しており，固有振動数を測定することにより，逆に，重心位置，慣性モーメントの測定が行われる場合もある．

機械工学演習 B (2) 基本問題

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　氏名

1. 図 1 は，未知の質量 m と未知のばね定数 k の自由度系を示しており，固有角振動数を測定すると $\omega_n = 100rad/s$ であった．さらに，$M = 0.9kg$ を付加して固有角振動数を測定してみると，$\Omega_n = 80rad/s$ であった．質量 m とばね定数 k を定めなさい．

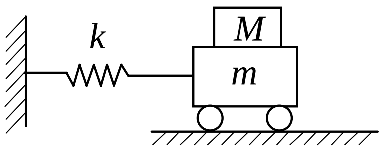

図 1 固有振動数を質量とばね定数の同定

2. 図 2 に示すような質量 $m_1 = 1\mathrm{kg}$，半径 $r = 50\mathrm{mm}$ の一様な円板と質量 $m_2 = 0.2\mathrm{kg}$，長さ $l = 60\mathrm{mm}$ の細長い棒が一体となった剛体振り子の固有振動数を求める．

(1) まず，与えられた記号を用いて，固有振動数を計算する式を導出せよ．

(2) 実際に数値を代入し，固有振動数の値を求めよ．

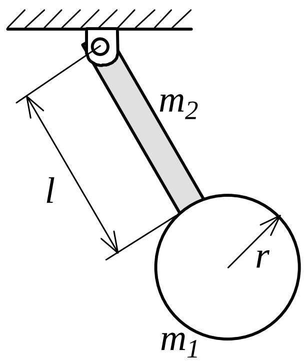

図 2 剛体振り子

機械工学演習 B (2) 応用問題

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　氏名

3. 図 3 に示すばねばかりの皿に質量 m の物体を載せると δ 変位して釣り合った．初期変位を与えて周期を測定すると T 秒だった．ばねばかりの皿の質量，および，ばね定数は分かっていないものとする．

(1) このばねばかりのばね定数 k と皿の質量 M を求めよ．

(2) ある物体をこのばねばかりに載せて固有周期 T_1 を測定することにより，質量 m_1 を算出できることを示せ．

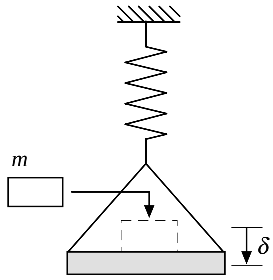

図 3 振動周期を用いた質量測定

4. 図 4 は，質量 m=2kg，AB 間の距離 l=0.3m の連節棒を表しており，点 A から重心 G までの距離 l_g=0.2m の剛体振子 (物理振子) と考えることができる．点 A を支点として振子運動をさせ，周期を測ったところ周期 T=1 秒であった．

(1) この剛体振子の重心回りの慣性モーメント I_G を求めよ．

(2) B の位置を支点として振子運動をさせた場合の固有周期を求めよ．

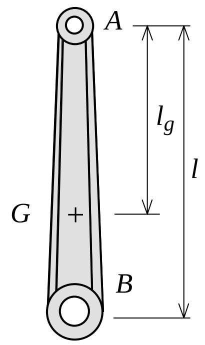

図 4　剛体振子の振子運動